E.S.C.A.E. 1982

MATHÉMATIQUES I

Algèbre et analyse

Option économique

DURÉE : 4 heures

N.B. — *Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de deux points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible...).*

Cette épreuve est constituée de deux problèmes.

PROBLÈME N° 1 (*sur 10 points*)

1° On considère la fonction.

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ t \longmapsto t - \ln |t| \end{array} \right.$$

ln représente la fonction logarithme népérien.

a. Étudier succinctement les variations de g.

b. En déduire l'existence d'un réel t_0 unique vérifiant : $g(t_0) = 0$

c. Donner une valeur approchée de t_0 à 10^{-2} près par défaut.
Préciser le signe de $g(t)$ suivant les valeurs de t.

2° Soit la fonction :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| + x - 1 \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 \longmapsto -1 \end{array} \right.$$

On appelle Γ la courbe représentative de φ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité 2 cm.

a. Étudier la continuité de φ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

b. Étudier les limites de φ en 1, $+\infty$ et $-\infty$.

c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe Γ.
Étudier la position de Γ par rapport à Δ dans les demi-plans d'équations: $x < 0$ et $x > 1$.

$\left(\text{On pourra poser } t = 1 - \frac{1}{x}.\right)$

d. Étudier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
Calculer $\varphi'(x)$ pour x élément de $\mathbb{R}^* - \{1\}$.
Montrer que $\varphi'(x) = g(t)$ où $t = \frac{x}{x-1}$.
On désignera par x_0 l'unique solution de $\varphi'(x) = 0$.
En déduire le tableau des variations de φ.

e. Exprimer $\varphi(x_0)$ en fonction polynôme de t_0.
Donner les valeurs approchées à 10^{-2} près par défaut de x_0 et $\varphi(x)_0$.

f. Tracer avec soin la courbe Γ.

.../...

2351

PROBLÈME N° 2 (*sur 10 points*)

I

On considère la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 18 \cdot (1{,}09)^x - 12 \cdot (1{,}13)^x \end{array} \right.$$

On appelle C la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. [unités graphiques : 1 cm en abscisse, 2 cm en ordonnée].

1° *a.* Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer la fonction dérivée de f.

b. Étudier les variations de f.

c. Déterminer les valeurs approchées à 10^{-2} près des coordonnées du point de C en lequel la tangente est parallèle à l'axe $(O, \vec{i})$.

2° Étudier la limite de f en $-\infty$. Qu'en conclut-on?
Étudier la limite de f en $+\infty$.

3° Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'abscisse λ du point d'intersection de C avec l'axe $(O, \vec{i})$.

4° Tracer avec précision la courbe C.

(On se limitera à l'intervalle [— 5, 12] en abscisse et on placera les points de C d'abscisses — 5, 0, 3, 6, 9 et 12 après en avoir calculé les ordonnées à 10^{-2} près.)

5° *a.* Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire l'aire de la partie du plan délimité par la courbe C, l'axe $(O, \vec{i})$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
Le résultat sera donné, à 10^{-2} près, en cm².

II

Une entreprise dispose d'un capital initial de 600 000 F.

Ce capital est placé le 1er janvier 1981 au taux annuel de 9 %. Les intérêts s'ajoutent au capital au 31 décembre de chaque année.

Cette entreprise décide par ailleurs de louer, à partir du 1er janvier 1982, des locaux supplémentaires pour étendre ses activités.

Le montant de la location, payable d'avance le 31 décembre de chaque année, est fixé, pour le premier versement, le 31 décembre 1981 à 48 000 F. Il subit d'autre part une augmentation annuelle de 13 %. Le loyer est prélevé sur le capital.

1° Déterminer le capital u_1 disponible au 1er janvier 1982.

2° Soit v_n le montant de la location pour la $n^{ième}$ année.

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison, et le premier terme.

3° On appelle u_n le capital disponible après le versement du $n^{ième}$ montant de la location et comptabilisation des intérêts.

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et v_{n+1}.

Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et v_{n+1}

En déduire u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n.

4° Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 10^5 \cdot f(n)$$

f désignant la fonction étudiée en I.

En déduire graphiquement, à l'aide de la courbe C, une valeur approchée du capital disponible le 1er janvier 1991.

Interpréter le résultat du I 3°.

FIN

1236 1

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail